შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

04.05.2014/ მათ/IV/ M440

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

შევამჩნიოთ, რომ 16-ის ტოლი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს $|Q(3^{2012})|$-მ

$$P(x) = -x^n + 16x^{n-1} + 3^{2012}.$$

$$Q(x) = -x^n + 3^{2012}x^{n-1} + 16.$$

ამ შემთხვევაში $|Q(3^{2012})| = 16$

ახლა ვაჩვენოთ სხვა რაიმე მნიშვნელობას შეიძლებს მიიღოს ამ მიზნით ~~ვერ~~ უფრო მეტს ~~მნიშვნელობას~~ მიიღებს $|Q(3^{2012})| = \cancel{d}$-ს ვაჩვენოთ ამ პირობის მიხედვით ~~ვაჩვენოთ~~:

$$P(x) = (x-16)R(x) + 3^{2012}$$

$$Q(x) = (x-3^{2012}) \cdot t(x) + d.$$

ამ წარმ. სახით $P(x)$; $Q(x)$-ის

მოვძებნოთ ბევრი. ($P(16) = 3^{2012}$ და $Q(3^{2012}) = d$ ამ შემთხვევაში)

$$R(x) \equiv c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1x + c_0$$

$$t(x) \equiv d_{n-1}x^{n-1} + d_{n-2}x^{n-2} + \ldots + d_1x + d_0$$

ახლა ჩამოვწეროთ ეს ორი კოეფიციენტები უნდა იყოს შებრუნ ~~P(x)-ის~~

$$P(x) = (x-16)(c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1 x + c_0) + 3^{2012}.$$

$$Q(x) = (x-3^{2012})(d_{n-1}x^{n-1} + d_{n-2}x^{n-2} + \ldots + d_1 x + d_0)$$

$x^n \to c_{n-1}$

$x^{n-1} \to c_{n-2} - 16c_{n-1}$

$x^{n-2} \to c_{n-3} - 16c_{n-2}$

$\vdots$

$x \to c_0 - 16c_1$

$x^0 \to 3^{2012} - 16c_0$.

$x^n \to d_{n-1}$

$x^{n-1} \to d_{n-2} - 3^{2012}d_{n-1}$

$x^{n-2} \to d_{n-3} - 3^{2012}d_{n-2}$

$\vdots$

$x \to d_0 - 3^{2012}d_1$

$x^0 \to -3^{2012}d_0 + d$

ასევე ეს მიმდევრობები უნდა $\{c_1;\ldots;c_{n-1}\}$ და $\{d_1;\ldots;d_{n-1}\}$ რომ ჩამოწერილი კოეფიციენტები ერთიდაიგივე სიმრავლეს ~~შეადგენდნენ~~ შეადგენდნენ ორივე.

ანუ ვქნით: პირველის x^n-ის კოეფ $=$ მეორის x^0-ის კოეფ.
პირველის x^{n-1}-ის კოეფ $=$ მეორის x^1-ის
$\vdots$
პირველის x^0-ის კოეფ $=$ მეორის x^n-ის

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

04.05.2014/ მათ/IV/ M440

ამოცანა № 4

გვერდი № 3

ანუ $c_{n-1} = -3^{2012} d_0 + d$ (1)

$c_{n-2} - 16 c_{n-1} = d_0 - 3^{2012} d_1$ (2)

$c_{n-3} - 16 c_{n-2} = d_1 - 3^{2012} d_2$

$\vdots$

$c_0 - 16 c_1 = d_{n-2} - 3^{2012} d_{n-1}$ (n-1)

$3^{2012} - 16 c_0 = d_{n-1}$ (n)

ცხადია I-ს აქვს ამონახსნი და ავიღოთ ისეთი რომ $c_{n-1} \neq 0$. ვიღებთ: ~~$c_{n-1} = -3^{2012}$~~ ~~$d_0 = 1$~~ $c_{n-1} = -3^{2012} + d$, $d_0 = 1$

მაშინ (1) ტოლობა სრულდება ასევე 2 ტოლობაში გვაქვს ~~2~~ ~~[illegible]~~ წრფივი განტოლება 2 უცნობიანი ~~[illegible]~~ c_{n-2} და d_1-ის მიმართ წრფივ მას აქვს ამონახსნი, რადგან c_{n-2}-ის კოეფიციენტი არის 1 ხოლო d_1-ის -3^{2012} და უსგ $(1; -3^{2012}) = 1$ ჩვენ კი ვიცით რომ $ax + by = c$ მთელ რიცხვებში აქვს ამონახსნი ~~#~~ თუ $(a; b) = 1$ და c ნებისმიე-რია. ეს ინდუქციურ გადაგვაქვს ქვემოთ განტოლებებზე

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3	04.05.2014/ მათ/IV/ M440

ამოცანა № 4 | გვერდი № 4

და ისე დავუშვათ $(n-1)$ გარდაქმნებით ჩიტიფის

აქვს ამონახსნი ინდუქციით, ანუ ვაჩვენეთ

რომ (n) გარდაქმნამდე ჭეშმარიტი ამონახსნი და

ეს ვაჩვენოთ რომ

$$c_{n-1} + (c_{n-2} - 16c_{n-1}) + (c_{n-3} - 16C_{n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + (c_0 - 16c_1) + (3^{2012} - 16c_0) = -3^{2012}d_0 + d +$$

$$+(d_0 - 3^{2012}d_1) + \ldots + (d_{n-1} - 3^{2012}d_{n-1}) + d_{n-1}$$

ამას აქვს ამონახსნი მაშინ (n) გარდაქმნამდე აქვს ამონახსნი მაშინ.

ვაჩვენოთ ეს გარდაქმნა

ანუ $3^{2012} - 15(c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}) =$

$$= (1 - 3^{2012})(d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1}) + d.$$

~~რადგან 15 და $1-3^{2012}$ ურთიერთმარტივებია~~

$(c_0; d_{n-1})$-ის მიმართ ამას აქვს ამონახსნი და ისეთი

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3	04.05.2014/ მათ/IV/ M440
ამოცანა № 4	გვერდი № 5

ცნობილია რომ $d_{n-1} \neq 0$ (სხვაგვარ ვერ ...)

~~სადაც $ax+by=c$ $(a;b)=1$ უმცირესი ...~~

~~სადაც და ამონახსნი $(x_0;y_0)$ ასევე~~

~~$(x_0+k\cdot b;\ y_0-ka)$ და რომ~~

~~მივიღეთ $Q(3^{2012})=0$ სადაც Q ...~~

~~... მინიმუმი $|Q(3^{2012})|=0$.~~

$1-3^{2012} \vdots 5$ $\quad 15 \vdots 5 \Rightarrow d \equiv 3^{2012} \pmod 5$

ანუ $d \equiv (3^4)^{503} \equiv 1^{503} \equiv 1 \pmod 5$

საიდან $\min|d| = 1$ უმცირესი ...

იმ სისტემის ამონახსნი სადაც $\boxed{\left(\frac{15}{5}; \frac{1-3^{2012}}{5}\right) = \left(3; \frac{1-3^{2012}}{5}\right) = 1.}$

P.S. ის ვარიანტი რომ ... ?

$$3^{2012} - 15(c_0+\dots+c_{n-1}) = (1-3^{2012})(d_0+\dots+d_{n-1}) + d.$$

ეს ... ... და ... მინიმუმი მივიღეთ

$\min|d| = 1 = \min|Q(3^{2012})|$, სადაც $Q(3^{2012}) = d$.

და რომ სისტემის სადაც $P;Q$ ... ... იმ

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

04.05.2014/ მათ/IV/ M440

ამოცანა № 4

გვერდი № 6

ს გამოდის (ინდუქციის ბაზა ნაჩვენებია გვერ. 3)

ანუ $\min|Q(3^{2012})| = 1$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3

04.05.2014/ მათ/IV/ M440

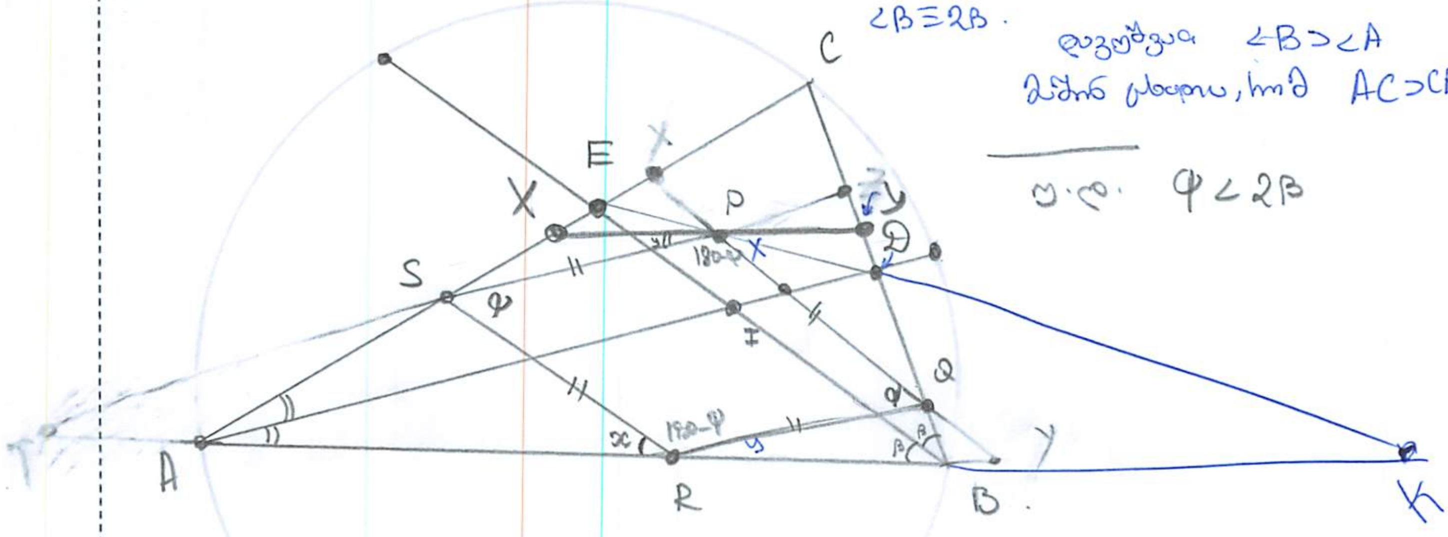
ამოცანა № 5

გვერდი № 1

$\angle B \equiv 2B.$

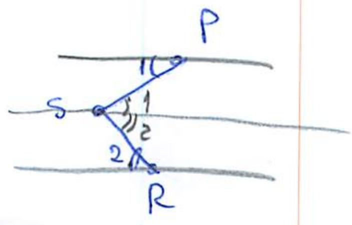
დავუშვა $\angle B > \angle A$
მაშინ ცხადია, რომ $AC > CB$

ვ.დ. $\varphi < 2B$



~~[illegible]~~

გავავლოთ P-ზე AB-ს პარალელური წრფე AC და CB-სთან ნკვეთა იყოს X და Y



ადვილი შევნიშნოთ რომ $\angle PSR = \angle 1 + \angle 2$
მ-ზეს რომ გავავლოთ პარალელური წრფე

ანუ $\angle \varphi = \angle SRA +$

$+\angle SPX$. $\angle SRA \equiv x$ $\angle SPX \equiv y$ და

$\varphi = x+y$

რადგან $AC > CB$ ამიტომ $\frac{AC}{AB} > \frac{CB}{AB}$

$\cancel{\frac{AF}{FC}}$ $\frac{CD}{DB} > \frac{EC}{EA}$ ამიტომ

ED კვეთავს AB წრეის გარსავს

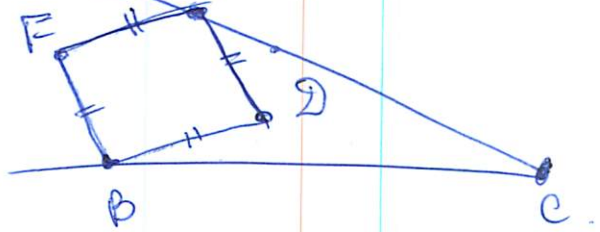
BA-ს დაგრძელება სივრცე, და B-ს მხრივ.

გარსავის წერტილი $\equiv K$.

SPQR ციკლური ოთხკუთხედის ჩახაზული

რომ, $\angle EKA$ და $\angle ACB$ ტოლია რაც ნიშნავს

რომ კუთხეები ტოლია რომ



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 3	04.05.2014/ მათ/IV/ M440
ამოცანა № 5	გვერდი № 3

როგორც აღვნიშნეთ $x+y=\varphi$ შესაბამისად $\angle QRB=y$

და $\angle APQ=\angle YPQ=X$